

**Predrag
Teovanović¹**

Fakultet za
specijalnu edukaciju
i rehabilitaciju,
Univerzitet u
Beogradu;
Institut za psihologiju,
Beograd

MODELI LATENTNOG RASTA U LONGITUDINALNIM ISTRAŽIVANJIMA

Cilj rada je da čitaocu konceptualno, grafički, matematički i kroz primere strukture rezultata predstavi postavke osnovnog modela latentnog rasta (LGM), koji su deo opštijeg okvira modelovanja strukturalnim jednačinama (SEM), a potom i da ga upozna sa ekstenzijama osnovnog modela, ukaže na prednosti u odnosu na tradicionalne tehnike i upozori na postojeća ograničenja, srodne pristupe i informiše o nalazima studija, čiji su podaci modelovani latentnim faktorima za koje se pretpostavlja da stoje u osnovi kako opšte, tako i specifičnih razvojnih putanja (*trajectories*).

Ključne reči: modelovanje latentnog rasta (LGM), longitudinalni podaci, razvojne putanje, modelovanje strukturalnim jednačinama (SEM)

¹ Adresa autora:
teovanovic@gmail.com

Primljeno: 04. 10. 2012.
Primljena korekcija:
15. 12. 2012.
Prihvaćeno za štampu:
16.12. 2012.

Longitudinalni dizajn predstavlja „najbolji pojedinačni kvaziekperimentalni nacrt namenjen istraživanju razvoja” (Bratko, 2002, p. 610) i ima nekoliko metodoloških prednosti u odnosu na konkurentne studije preseka. Premda longitudinalni uzorak može biti nereprezentativan spram opšte populacije, ispitanici sami sebi služe kao kontrola, čime se izbegava problem uzrasne pristrasnosti uzorka. Registrovane *uzrasne promene* se stoga ne mogu pripisati *generacijskim razlikama* kao u slučaju transverzalnih nacrtu (Horn & Blankson, 2005; McArdle et al., 2002).

Dva koncepta promene, dve discipline naučne psihologije

U longitudinalnim istraživanjima treba praviti razliku između dve vrste promene (Caspi & Bem, 1990). Apsolutna stabilnost se odnosi na postojanost stepena izraženosti merene varijable u funkciji vremena i testira se poređenjem grupnih proseka (uglavnom se koristi ANOVA za zavisne uzorke). Sa druge strane, pojam diferencijalne stabilnosti tiče se doslednosti individualnih razlika i izražava koeficijentima stabilnosti, odnosno test-retest korelacijama. Dva koncepta promene su međusobno nezavisna: koeficijenti korelacije ne sadrže informacije o stepenu izraženosti (intenzitetu) varijable, te se gube značajne informacije o razvojnoj putanji (*trajectory*) ispitivane pojave, dok se testiranjem prosečnih promena individualne razlike tretiraju kao varijansa greške.

S jedne strane, individualne razlike u određenom razdoblju mogu biti veoma stabilne, iako je u apsolutnom smislu došlo do velikih promena. Sa druge strane, isključivim oslanjanjem na proseke, istraživači se samovoljno odriču informacija o pokazateljima promena unutar pojedinaca. Takva strategija može voditi pogrešnim zaključcima. Pretpostavimo, na primer, da u okviru uzorka ispitanika koje longitudinalno pratimo postoji grupa pojedinaca (G_1) koji beleže rast (P_1) na nekoj varijabli od uzrasta t_1 do uzrasta t_2 , dok druga grupa (G_2) u istom periodu beleži pad (P_2). Ukoliko su grupe jednake ($G_1 = G_2$), kao i intenziteti promene ($P_1 = P_2$), uprosečavajući mere u vremenskim tačkama t_1 i t_2 , došli bismo do (pogrešnog) zaključka da promene nije bilo, iako svaka pojedinačna razvojna krivulja pokazuje ili rast ili opadanje.

Čemu služe modeli latentnog rasta?

Modeli latentnog rasta (*Latent Growth Models* – LGM) nastali su iz potrebe da se reši specifičan problem predstavljanja i interpretacije raspoloživih individualnih podataka u longitudinalnim studijama. Pored opisa pojedinačnih razvojnih putanja, LGM se bavi i individualnim razlikama u ovim putanjama. Drugim rečima, LGM uzima u obzir i proseke (koji odgovaraju informacijama na nivou grupe) i varijanse (koje se tiču individualnih razlika) i stoga se smatra obuhvatnim okvirom analize longitudinalnih podataka (Bollen & Curran, 2006; Duncan & Duncan, 2004; Duncan, Duncan, Strycker, Fuzhong, & Alpert, 1999; McArdle, 2004, 2005,

2007; McArdle & Bell, 2000; McArdle & Epstein, 1987; McArdle, Ferrer-Caja, Hamagami, & Woodcock, 2002; McArdle, Grimm, Hamagami, Bowles, & Meredith, 2009; McArdle, Hamagami, Meredith, & Bradway, 2000; Muthen & Khoo, 1998; Raykov, 1995).

LGM predstavlja samo jedan od mogućih okvira za modelovanje individualnih razlika u krivuljama rasta. Snažnu alternativu pružaju hijerarhijski linearni modeli, a konkurentni su i nelinearni dinamički modeli, metode analize vremenskih serija, regresija sa pridruženim greškama merenja i analiza preživljavanja (videti Bollen & Curran, 2006, i Kline, 1998, i McArdle et al., 2009). Međutim, u osnovi je modelovanje latentnog rasta na matematičkom nivou istovetno hijerarhijskom linearnom modelovanju longitudinalnih podataka, a smatra se da će se postojeće razlike smanjivati kako pristupi budu dalje konvergirali u svom razvoju (McArdle et al., 2002).

Uopšteno govoreći, tehnike analize krivulja rasta se tiču „procesa opisivanja, testiranja hipoteza i donošenja naučnih zaključaka o obrascima rasta i promena širokog opsega fenomena koji se mogu pratiti tokom dužeg perioda vremena” (McArdle, 2004, p. 340). Istorijski posmatrano, prva istraživanja razvojnih putanja (Gompertz, 1830; Verhulst, 1845, oba prema Bollen & Curran, 2006) bila su usmerena ka grupama. Počeci bavljenja problemima individualnih krivulja rasta vezuju se za Wisharta (Wishart, 1938, prema McArdle, 2004). Preokret opšte analitičke strategije odigrao se sredinom prošlog veka uvođenjem latentnih varijabli i korišćenjem opšteg faktorsko-analitičkog okvira. Tucker (1958) i Rao (1958) nezavisno jedan od drugog ukazuju da procesi rasta nisu direktno opazivi, nego da se na osnovu ponovljenih mera o njima može samo posredno zaključivati. Krajem osamdesetih (McArdle & Epstein, 1987; Meredith & Tisak, 1990) modelovanje krivulja je inkorporirano u širi konfirmatorni okvir modelovanja strukturalnim jednačinama (*Structural Equation Modeling* – SEM). Od tada se interesovanje razvojnih diferencijalista usmerava ka neopaženim faktorima latentnih putanja koji utiču i na kovarijanse i na proseke opaženih varijabli. „Najistaknutija odlika LGM modela je uključivanje neopaženih faktora latentnog rasta, procenjenih na osnovu ponovljenih merenja jedne varijable, koji se koriste da bi opisali longitudinalne korelacije, varijanse i proseke” (McArdle & Epstein, 1987, p. 110).

Uslovi upotrebe modela

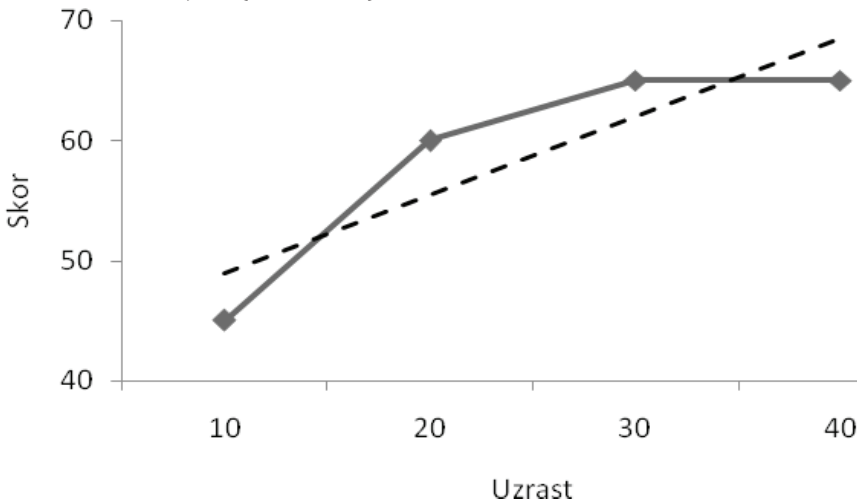
Kao i u drugim primenama SEM okvira, ni LGM analiza ne zahteva sirove podatke, već samo matrice korelacija, standardnih devijacija i proseka merenih varijabli. Kline (1998) eksplicira tri uslova LGM upotrebe. Prvo, ponovljeni podaci treba da budu prikupljeni u najmanje tri vremenske tačke i da potiču barem sa intervalne merne skale. Sa povećanjem broja merenja, raste broj stepeni slobode i parametara koje je moguće proceniti. Drugi uslov je da registrovani skorovi ispitanika budu izraženi u komparabilnim jedinicama (na primer, kao procenat tačno rešenih zadataka) i da mere isti konstrukt. Konačno, podaci moraju biti vremenski

strukturisani, odnosno ispitanike treba ispitivati u (približno) istim vremenskim tačkama, koje ne moraju nužno biti među sobom podjednako udaljene².

Prikaz osnovnog modela latentnog rasta

Individualne razvojne putanje (prvi nivo analize)

Modelovanjem latentnog rasta se uvažava činjenica da se pojedinci razlikuju u svom rastu kroz vreme, odnosno da svaka osoba ima svojevrsnu razvojnu putanju. Prvi korak analize podrazumeva opis pojedinačnih razvojnih putanja u terminima regresionih jednačina. Pretpostavimo da imamo podatke o ispitaniku u četiri jednako udaljene vremenske tačke (Slika 1). Kvadratima su označeni položaji ispitanika na zavisnoj varijabli u svakoj situaciji merenja, a isprekidanom linijom vrednosti procenjene metodom najmanjih kvadratnih odstupanja, odnosno regresionom funkcijom ($Y' = a + bX$).



Slika 1. Primer individualne razvojne trajektorije procenjene linearnom funkcijom

Podatak o vrednosti na zavisnoj varijabli (Y) u datom trenutku ispitivanja (t), za datog ispitanika (n) se označava kao $Y[t]_n$. Jednačina putanje (1) izražava pretpostavku osnovnog modela koja se može testirati, po kojoj je $Y[t]_n$ funkcija tri parametra – početnog nivoa, nagiba i greške.

$$Y[t]_n = y_{0,n} + (y_{s,n} \times A[t]) + e[t]_n \quad (1)$$

Početni nivo ($y_{0,n}$) predstavlja vrednost koju ispitanik uzima na zavisnoj varijabli Y u prvoj situaciji merenja (t_0). Iako nalikuje interceptu u klasičnoj regre-

² Ipak, Duncan i saradnici (Duncan et al., 1999) ukazuju da LGM može biti testiran čak iako nije ispunjen uslov vremenske stukturisanosti, ali se tada moraju postaviti specifična modelska ograničenja. Detalji se mogu naći i u Mehta i West (Mehta & West, 2000).

sionoj analizi, inicijalni nivo ne predstavlja mesto na kojem regresiona linija seče ordinatu, već vrednost kriterijuma u prvoj vremenskoj tački, odnosno u trenutku započinjanja krivulje rasta.

Koeficijent linearne promene ($y_{s,n}$) jeste pokazatelj nagiba funkcije i , u svojoj nestandardizovanoj formi, govori o tome za koliko se jedinica promeni skor datog ispitanika na zavisnoj varijabli (ΔY_n) kada napravimo jedan vremenski korak ($\Delta t = 1$). Treba imati u vidu da se skor promene (nagiba) smatra konstantnim unutar pojedinca, ali ne i između pojedinaca.

Koeficijenti uzrasne osnove (bazični ponderi; *age basis*, *basis weights*, *basis coefficients*) $A[t]$ određuju oblik razvojne putanje i predstavljaju prediktorsku varijablu, odnosno veličinu kojom se množi nagib funkcije. Za svaku vremensku tačku (t), vrednost uzrasne osnove je ista za sve ispitanike u istraživanju (odatle dolazi zahtev za vremenskom strukturisanošću podataka).

Jednačina putanje rasta imala bi opšti izraz regresione jednačine da procenjenim vrednostima nisu dodate i greške, reziduali ($e[t]_n$), kako bi se došlo do formule empirijskog skora. Mogućnost korigovanja parametara krivulje na osnovu grešaka merenja uzima se kao suštinska prednost modela latentnog rasta u odnosu na tradicionalne tehnike obrade longitudinalnih podataka (Kline, 1998). Reziduali nisu isti na svakom uzrastu, niti za svakog ispitanika. Osnovni LGM uključuje i sledeće četiri pretpostavke o greškama: njihova prosečna vrednost je jednaka nuli u svakoj tački merenja, one nisu korelirane sa koeficijentom uzrasne osnove, niti su autokorelirane, a pokazuju i homoskedasticitet u svakoj vremenskoj tački (Bollen & Curran, 2006).

Latentna razvojna putanja (drugi nivo analize)

Na drugom nivou analize, LGM pretpostavlja postojanje latentnih razvojnih procesa koji nisu direktno opazivi, već se o njima zaključuje posredno. Korišćenjem ponovljenih mera istih ispitanika procenjuju se parametri latentnih razvojnih putanja tokom svih vremenskih tačaka, unutar svakog ispitanika. Cilj je proceniti parametre funkcije koja najbolje fituje ponovljene mere svih ispitanika tokom vremena, odnosno „identifikovati prikladne forme krivulje rasta koja će precizno i parsimonično opisati individualni razvoj i dozvoliti istraživanje individualnih razlika u parametrima koji kontrolišu obrazac rasta tokom vremena” (Duncan et al., 2004, p. 335). Drugim rečima, modelima latentnog rasta nastojimo da „izravnamo individualne putanje kako bismo dobili parsimoničnu procenu latentnih putanja koje leže u osnovi registrovanih ponovljenih mera” (Bollen & Curran, 2006, p. 2).

Na osnovu podataka možemo proceniti prosečne vrednosti inicijalnog nivoa i i nagiba (μ_0 i μ_s), njihove standardne devijacije (σ_0 i σ_s) i greške (d_0 i d_s). Tako se parametri individualnih krivulja mogu posmatrati kao udaljenja od prosečnih:

$$y_{0,n} = \mu_0 + d_{0,n} \quad (2)$$

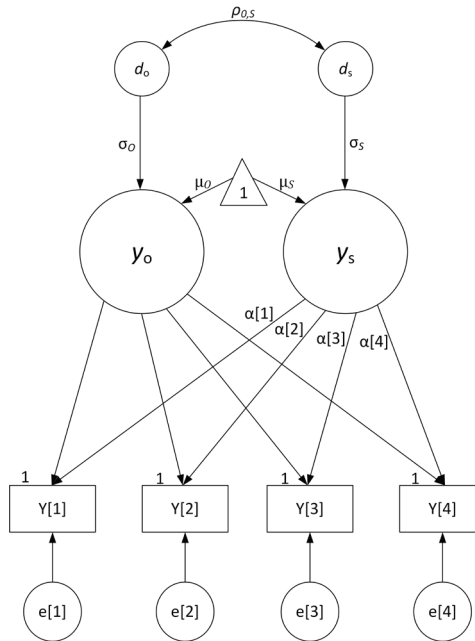
$$y_{s,n} = \mu_s + d_{s,n} \quad (3)$$

Kada se u jednačinu putanje (1) umetnu funkcije inicijalnog nivoa (2) i nagiba (3), dobija se kombinovani model (4), kojim se putanja zavisne varijable definiše

kao funkcija prosečnog intercepta, prosečnog nagiba ponderisanog koeficijentom uzrasne osnove i kompozita varijabli greške. Prvi deo jednačine predstavlja strukturu proseka, dok njen drugi deo reprezentuje različite izvore odstupanja.

$$Y[t]_n = (\mu_0 + \mu_s A[t]) + (d_{0,n} + d_{s,n} A[t] + e[t]_n) \quad (4)$$

Do pomenutih parametara se dolazi modelovanjem strukturalnim jednačinama. Na grafičkoj reprezentaciji osnovnog modela latentnog rasta (Slika 2), četiri ponovljene mere (manifestne varijable) predstavljene su kvadratima. Varijable, čije vrednosti nisu neposredno opažene, označene su krugovima, a dve koje se nalaze u centralnom delu dijagrama (y_0 i y_s) predstavljaju latentni intercept i latentni nagib. Iako nalikuju faktorima konfirmatorne analize, faktori latentnog rasta reprezentuju individualne razlike u atributima putanja rasta tokom vremena (Duncan et al., 2004). Posebnu pažnju treba obratiti na parametre modela koji leže na kauzalnim vezama, grafički predstavljenim jednosmernim strelicama. Iako je uobičajeno da se u modelima merenja samo jedno faktorsko zasićenje fiksira kako bi se odredila merna skala, u LGM vrednosti ovih parametara određujemo apriorno, naročito u slučaju zasićenja latentnog intercepta.



Slika 2. Primer osnovnog modela latentnog rasta četiri ponovljene mere

Pored toga što se, poput drugih modela merenja, bavi strukturom kovarijanse, LGM eksplicitno modeluje i strukturu proseka faktora i opaženih varijabli (Bollen & Curran, 2006; Duncan et al., 1999; Kline, 1998; McArdle & Bell, 2000; McArdle & Epstein, 1987; Muthen & Khoo, 1998). Kako bi se proseci uključili u LGM, potrebno

je uvesti i novo sredstvo, konstantu ($k = 1$) koja je na dijagramu predstavljena trouglom. Ona nam dozvoljava da proseke intercepta i nagiba zapišemo kao regresione koeficijente (jednosmerne strelice koje idu od konstante do latentnih faktora rasta).

Faktor intercepta (y_0). Intercept govori kolika bi bila vrednost zavisne varijable kada ne bi postojao rast. Polazeći od pretpostavke da faktor intercepta podjednako utiče na sve ponovljene mere u svim vremenskim tačkama, parametri faktorskih zasićenja ponovljenih mera su fiksirani na istu vrednost (uglavnom na 1). LGM nam omogućava da, pored proseka (μ_0), dobijemo i procenu varijanse ovog faktora (σ_0^2), što je korisna opcija ukoliko želimo da razmišljamo o interceptu kao o zavisnoj varijabli, odnosno ako nastojimo da istražimo dodatne varijable koje bi mogle da objasne disperziju pojedinačnih startnih pozicija.

Faktor nagiba funkcije, stope rasta (y_s). Prosek faktora nagiba (μ_s) govori o tome za koliko jedinica grupna krivulja raste svake godine, dok njegova varijansa (σ_s^2) predstavlja meru raspršenja pojedinačnih nagiba od opšteg. Ukoliko bi uprosečeni nagib, korigovan za grešku merenja, bio jednak nuli, to bi značilo da ne postoje promene zavisne varijable u vremenu na grupnom nivou. Zahvaljujući modelovanju varijanse, pored prosečne promene, možemo da istražimo i individualne varijacije u promeni, odnosno da ispitamo razloge zbog kojih su kod nekih ljudi promene brže a kod nekih sporije.

Kada postoji dovoljno tačaka za slobodno procenjivanje faktorskih zasićenja, faktor nagiba (y_s) je bolje interpretirati kao faktor opšteg oblika. Zapravo, faktorom nagiba ga treba imenovati tek onda kada je linearna funkcija podesnija spram podataka u odnosu na konkurentne funkcije.

Oblik krivulje rasta ($A[t]$). Upravo su koeficijenti uzrasne osnove ključni za razumevanje oblika krivulje. Često se modelskim specifikacijama njihove vrednosti fiksiraju tako da odražavaju vremenske razmake između situacija ispitivanja, čime se pretpostavlja linearni rast. Na primer, ukoliko imamo četiri podjednako udaljene vremenske tačke, konvencija je da se pravolinijski trend odredi koeficijentima $A[t] = [0, 1, 2, 3]$. Naravno, ukoliko je interval između ispitivanja nejednak (npr. ispitivanja su sprovedena na uzrastima od 10, 20, 45 i 55 godina), potrebno je prilagoditi koeficijente uzrasne osnove ukoliko se želi modelovati linearan trend (npr. $A[t] = [0, 1, 3.5, 4.5]$). Kada se ove vrednosti posmatraju u kontekstu jednačine putanja (1), primećuje se da pozicija ispitanika na zavisnoj varijabli u prvoj situaciji ispitivanja, ukoliko zanemarimo grešku, biva određena samo interceptom ($Y[1]_n = y_{0,n}$) dok se u drugoj dodaje i neponderisana vrednost nagiba ($Y[2]_n = Y[1]_n + y_{s,n}$) te da su sve dalje promene linearnog tipa ($Y[t]_n = Y[t-1]_n + (t-1)y_{s,n}$), odnosno da su dobijene množenjem koeficijenta nagiba sa unapred linearno određenim vrednostima uzrasne osnove.

Prednost rada u LGM okviru je mogućnost specifikacije i nelinearnih trendova. Sa jedne strane, možemo unapred odrediti kvadratnu (ili neku drugu krivolinijsku funkciju) fiksirajući, na primer, $A[t] = [0, 1, 4, 9]$. Sa druge strane, moguće je eksplorativno istraživati i samu prirodu oblika krivulje rasta (nelinearni modeli mogu se testirati tek ukoliko imamo tri tačke merenja, jer tek u tom slučaju ima-

mo jedan stepen slobode, odnosno podatke koji mogu potencijalno da dokažu da linearni model loše fituje podacima).

LGM nudi relativno jednostavan način da se istraži oblik krivulje rasta tako što se dozvoljava grupnoj krivulji da uzme oblik na osnovu empirijskih podataka. Naime, mogu se fiksirati samo dva parametra dok se ostali slobodno procenjuju. U konkretnom primeru, to bismo pisali kao $\alpha[t] = [0, 1, *, *]$. Naj taj način, do optimalnog oblika rasta za celu krivulju dolazimo putem modelskih procena (i tada se vrednosti ovih parametara označavaju malim grčkim slovom $\alpha[t]$). Moguće su i alternativne tehnike testiranja nelinearnog rasta uključivanjem dodatnih latentnih faktora nagiba koji predstavljaju kvadratne ili kubne efekte (videti Duncan et al., 1999, i McArdle & Bell, 2000).

Reziduali ($e[t]$). U svakoj testovnoj situaciji vremenski i individualno specifični faktori utiču na postignuće, zbog čega određeni skor, koji je na osnovu procesa latentnog rasta očekivan na datom uzrastu za datog ispitanika, ne biva uvek realizovan. Ovi faktori se nazivaju rezidualima ili greškama. Varijanse reziduala rezultat su modelskih estimacija (stoga su one latentne varijable) i pretpostavljeno je da nisu korelirane sa drugim faktorima, ali su moguće i naprednije opcije, poput kovariranja grešaka merenja (videti Kline, 1998).

Odnos intercepta i nagiba ($\rho_{0,s}$). Dodatni aspekt strukture kovarijansi tiče se procene odnosa dva faktora rasta. Mogućnost korelacije latentnih faktora je označena dvosmernom strelicom i predstavlja još jednu komparativnu prednost LGM u odnosu na konkurentne modele. Tako bi, na primer, pozitivna korelacija između dve varijanse značila da pojedinci sa višim interceptom istovremeno imaju i veće nagibe, i obratno, što u zavisnosti od prirode istraživanja može biti teorijski koristan podatak.

Podesnost (fit) modela

Predložene strukturalne organizacije longitudinalnih podataka pružaju eksplicitne predikcije o prosecima i kovarijansama ponovljenih mera, tako da model latentnog rasta može biti odbačen na statističkoj osnovi. SEM okvir omogućava procenu podesnosti, tj. fita modela u celini, ali i pojedinačnih parametara modela. Postoji mnoštvo indeksa podesnosti ili fita modela, od kojih je najpoznatiji hi-kvadrat statistik. Detaljan pregled opštih pokazatelja podesnosti unutar SEM okvira daje Lazarevićeva (2008), dok Curran i Bollen (Curran & Bollen, 2006) govore o njihovoj LGM primeni.

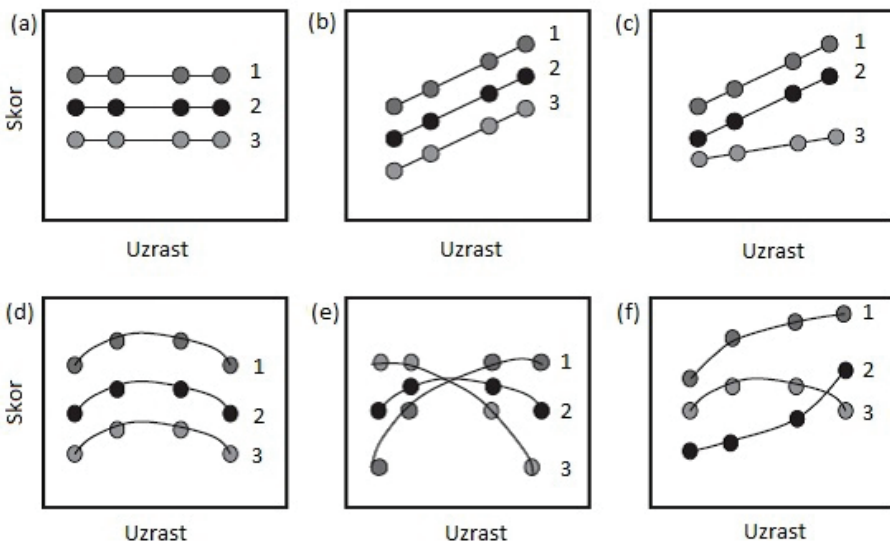
Primeri strukture rezultata: odnos individualnih krivulja i grupnih parametara

Primeri strukture rezultata, prikazani na Slici 3, olakšavaju razumevanje odnosa između pojedinačnih krivulja rasta i grupnih LGM statistika. U svih šest primera (a-f) prikazane su po četiri ponovljene mere za tri ispitanika. Na prva

tri grafikona individualne razvojne krivulje su pravolinijske, dok drugi set čine nelinearne funkcije.

Na prvom grafikonu (a) tri krivulje su paralelne ali su različitih visina. Prime-na modela latentnog rasta na ovim podacima bi pružila procenu faktora latentnog intercepta sa prosekom μ_0 i varijansom σ_0^2 , ali bi ostali parametri bili jednaki nuli. Drugi grafikon (b) se od prethodnog razlikuje po tome što su tri krivulje usmerene na gore. U ovoj situaciji je relevantan i parametar prosečnog nagiba ($\mu_s > 0$), ali je varijansa nagiba i dalje $\sigma_s^2 = 0$, jer svi pojedinci imaju isti oblik krivulje. Treći dija-gram (c) pokazuje "lepezasto" raspršenje individualnih krivulja. U ovom modelu svi parametri su različiti od nule, uključujući i korelaciju nivoa i nagiba.

U četvrtoj situaciji (d) je $A[t] = [1, 2, 2, 1]$ a grupna krivulja najpre raste i po-tom opada. Tri individualne krivulje se razlikuju po visini, tako da je $\sigma_0^2 > 0$, ali svi ispitanici imaju isti nagib pa je $\sigma_s^2 = 0$. Peti grafikon (e) prikazuje drugačije oblike krivulje, što znači da je i varijansa nagiba različita od nule ($\sigma_s^2 > 0$). Konačno, šesti dija-gram (f) predstavlja najrealističniji scenario, i ovde su ponovo svi parametri rasta neophodni kako bi se opisali obrasci pojedinačnih trajektorija.



Slika 3. Primeri strukture rezultata na nivou pojedinačnih razvojnih krivulja

Ekstenzije osnovnog modela

Postoji mnoštvo ekstenzija osnovnog modela (videti Bollen & Curran, 2005, i Duncan et al., 1999, 2004, i Hamagami, 1999, i Kline, 1998, i McArdle et al., 1987, 2000, 2002, 2004, 2005, 2009), a u ovom odeljku ćemo predstaviti samo neke od njih.

Uvođenje prediktora

LGM okvir je naročito koristan kada pokušavamo da objasnimo individualne varijacije u inicijalnom nivou i stopi rasta. Kada su varijanse latentnih faktora značajno različite od nule, istraživač može uvesti eksplanatorne varijable u model, koje se mogu posmatrati kao uzroci rasta. Model novog nivoa analize, sa pretpostavljenim direktnim uticajem varijable X na latentne faktore, uvodi se sledećim skupom jednačina:

$$Y[t]_n = y_{0n} + y_{sn} \times A[t] + e[t]_n \quad (5)$$

$$y_{0n} = v_0 + \gamma_0 X_n + e_{0n} \quad (5a)$$

$$y_{sn} = v_s + \gamma_s X_n + e_{sn} \quad (5b)$$

pri čemu su v_0 i v_s intercepti, a γ_0 i γ_s regresioni nagibi za efekte varijable X na dve latentne komponente koje stoje u osnovi ponovljenih mera ispitivanja. Duncan i Duncan (Duncan & Duncan, 2004) naglašavaju da uvođenje prediktorskih varijabli menja način interpretacije parametara modela. Konkretno „prosečni nagib sada predstavlja regresioni intercept, ili onaj deo stope rasta zavisne varijable koji nije objašnjen dodatnim prediktorskim varijablama, dok se varijansa nagiba posmatra u terminima greške, odnosno predstavlja rezidualne varijacije” (Duncan & Duncan, 2004, p. 344).

Moguće je i dalje usložnjavati prediktorske modele. Tako se, na primer, mogu ispitivati nelinearni efekti prediktora, uvoditi dodatne varijable i proveravati njihove interakcije u delovanju na parametre latentne trajektorije.

Poređenje grupa

Unutar LGM okvira se može testirati i jednakost razvojnih krivulja u različitim grupama ispitivanja. Zanemarivanje grupnih razlika moglo bi da dovede do pristrasnih i nedoslednih modelskih estimacija i neprikladnih predikcija. Logika testiranja grupne invarijantnosti nalikuje modelu višezoračke konfirmatorne faktorske analize (*multisample CFA*; videti Keith, 2005). Isti model rasta se istovremeno postavlja za svaki poduzorak. Istraživač najpre može specificovati invarijantnost parametara na svakom poduzorku, koristeći jednaka ograničenja, a potom simultano proveriti opšte fitovanje takvog grupnog modela. Ukoliko je takav model podesniji podacima, može se prihvatiti da različiti uzorci potiču iz iste populacije. U suprotnom, postoji interakcija grupne pripadnosti i određenog strukturalnog modela. Postepenim relaksiranjem parametara modela prate se promene u podesnosti i na taj način se proverava koji su aspekti latentne putanje različiti u različitim grupama.

Ubrzani modeli

Pojam ubrzanog nacрта se odnosi na kombinaciju dve osnovne tehnike prikupljanja podataka u razvojnim istraživanjima – longitudinalne i transverzalne. Ovaj dizajn se sastoji od ograničenih, ali vremenski preklapajućih ponovljenih mera većeg broja nezavisnih kohorti. Prvi ga uvodi Bell (1953) pod nazivom metoda konvergencije, smatrajući ga jednim od načina aproksimacije dugoročne longitudinalne studije. Duncan i saradnici (Duncan et al., 2004), misleći na isto, govore o kohort-sekvencionalnom modelu. Ova tehnika takođe dopušta istraživaču da odredi da li su latentne putanje ponovljenih mera potvrđene unutar kratkog vremenskog perioda za svaku kohortu. Prednosti ove strategije naglašava i Bratko (2002).

Pitanje jednakosti merenja

Jednakost merenja u različitim vremenskim tačkama jedan je od osnovnih uslova upotrebe modela latentnog rasta. Međutim, korišćenje istog mernog instrumenta je opterećeno brojnim problemima, među kojima su najozbiljniji efekat treninga i uzrasna prikladnost stavki. Međutim, korišćenje različitih instrumenata u različitim tačkama praćeno je otežanim razlikovanjem efekata skala od stvarnih promena u konstruktima tokom vremena. Longitudinalni istraživači pristupaju ovom problemu na nakoliko načina, koristeći regresione modele, standardizovane skorove, apsolutno skaliranje i konfirmatornu faktorsku analizu. Ipak, svaki od navedenih postupaka nosi sa sobom ozbiljna ograničenja koja se tiču gubljenja informacija od suštinske važnosti za obuhvatnu analizu latentnih trajektorija (videti McArdle et al., 2009).

Čini se da se do optimalnog rešenja može doći upotrebom Teorije odgovora na stavke (*Item Response Theory* – IRT). McArdle i saradnici (McArdle et al., 2002, 2009) pokazuju kako se IRT koncepti mogu koristiti kako bi se postigla longitudinalna jednakost merenja, čak i kada se u različitim vremenskim tačkama ne koriste isti merni instrumenti. Specifična objektivnost, pretpostavka o jednodimenzionalnosti i lokalnoj nezavisnosti, te kalibracija i ispitnika i ajtema na istoj skali, čine IRT postavke komplementarnim u odnosu na potrebe modela latentnog rasta. U jednom od SEM-IRT tipova integracije, Hamagami (1998) pokazuje kako longitudinalna invarijantnost faktorske strukture seta ajtema može biti evaluirana kroz dostupni SEM softver.

Multivarijatni modeli

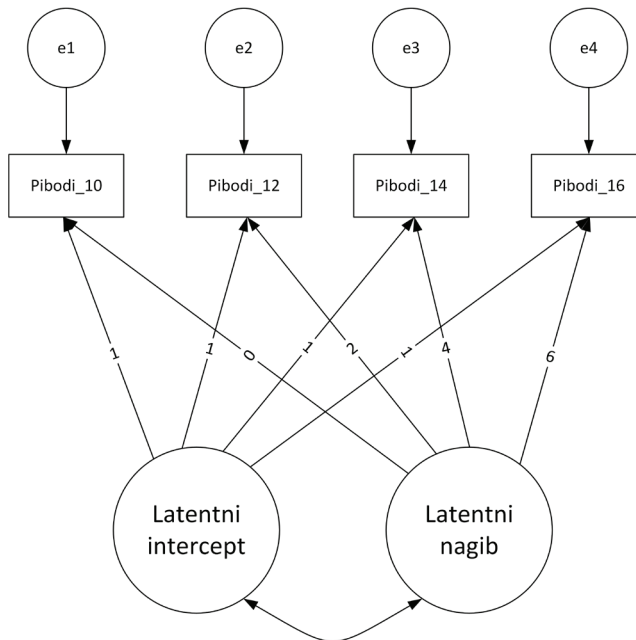
U longitudinalnim studijama može biti važno da se ispita kako se promene jedne varijable odnose spram promena drugih varijabli. Upravo multivarijatni LGM omogućava da se prikaže „na koji se način procesi odvijaju u dinamičkoj sekvenci tokom relativno dugog perioda vremena” (McArdle et al., 2000, p. 56).

Tako, na primer, u slučaju bivarijantnog modela latentnog rasta postoje dve varijable ($Y[t]$ i $X[t]$), sa odvojenim latentnim osnovama ($A_x[t]$ i $A_y[t]$) i sa različitim faktorima inicijalnog nivoa (x_0, y_0) i nagiba (x_s, y_s), kojima je dopušteno da međusobno

koreliraju. Ovakav model otvara nekoliko mogućnosti. Najpre, može se razmotriti invarijantnost faktora, pod uslovom da postoje uporedive mere. McArdle (McArdle, 2005) navodi sledeći primer: ako $X[t]$ predstavlja skor deteta, a $Y[t]$ skor roditelja na istim merama, možemo testirati direktnu jednakost oblika dve krive, odnosno da li je $A_y[t] = A_x[t]$. Ipak, od primarnog interesa je kovarijansa ili korelacija dva faktora nagiba (ρ_{s_x, s_y}). Ovaj parametar predstavlja indeks zajedničke promene varijabli i sažeto govori o načinu na koji se individualne razlike u promenama tokom vremena u jednoj varijabli odnose spram individualnih razlika u promenama na drugoj varijabli.

Primer modelovanja longitudinalnih podataka

Za ilustrativne svrhe korišćeni su javno dostupni podaci longitudinalne studije (<https://www.nlsinfo.org/investigator/pages/search.jsp>) koju sprovodi statistički biro američkog ministarstva rada. Izdvojen je uzorak dece rođene 1996. godine ($N = 130$) koja su, između ostalog, bila ispitivana Pibodijevim individualnim testom postignuća iz matematike (*Peabody Individual Achievement Test*) na uzrastu od 10, 12, 14 i 16 godina. Postignuće ispitanika je izraženo kao broj tačnih odgovora na testu.



Slika 4. Osnovni model latentnog rasta sa četiri tačke merenja

Većina savremenih softvera uključuje mogućnost modelovanja latentnog rasta. U ovom radu ćemo prikazati kako se longitudinalni podaci mogu modelovati korišćenjem statističkog paketa AMOS (verzija 19.0), čije je grafičko okruženje naj-

prilagođenije korisniku. AMOS olakšava postavljanje osnovnog modela kroz opciju *Plugins/Growth Curve Models* u kojoj je potrebno samo specificirati broj tačaka merenja. Nakon toga je potrebno odabrati fajl sa podacima (opcija *File/Data Files*) i u odgovarajuća pravougaona polja prevući manifestne varijable (Slika 4). Prvi koeficijent uzrasne osnove je postavljen na nulu, dok razmak između tri preostala odražava protok vremena u godinama između ispitivanja $A[t] = [0, 2, 4, 6]$.

Modelske procene proseka i varijanse faktora intercepta ($\mu_0 = 33.73$, $\sigma_0^2 = 99.77$) i faktora stope rasta ($\mu_s = 4.32$, $\sigma_s^2 = 0.92$) ukazuju na dve stvari. Prvo, ukoliko bi se u model uvodili prediktori, više bi smisla imalo kao kriterijumsku varijablu koristiti intercept nego nagib, s obzirom na veliku disperziju mera inicijalnog nivoa u odnosu na procenjeni prosek. Na uzrastu od 10 godina, ispitanici rešavaju u proseku 33.73 zadatka na Pibodijevom testu, dok svake godine njihovo postignuće raste u proseku za 4.32 jedinice, tako da na uzrastu od 12 godina mogu da reše 43.37 zadataka (14 godina - 52.01; 16 godina - 69.26). Procenjeni koeficijent kovarijanse ($Cov = 0.60$, $p = .746$; u standardnoj formi $r = .06$) ukazuje da ne postoji veza između inicijalnog nivoa postignuća ispitanika i stope napredovanja na testu matematičkog postignuća tokom godina. Prikazani rezultati imaju samo ilustrativnu vrednost, posebno kada se ima u vidu da su varijanse grešaka visoke ($e_i = 39.84$) a indeksi fita modela, van granica zadovoljavajućih vrednosti ($\chi^2 (8, N = 130) = 53.56$, $p < .001$, $NFI = .86$, $RMSEA = .21$).

Ograničenja modela latentnog rasta

Prvi skup ograničenja LGM nasleđuje od longitudinalnih nacрта. Premda se jednakost merenja može postići korišćenjem IRT tehnologije (čime se eliminiše i efekat uvežbavanja), kao što se dobro planiranim vremenskim rasporedom situacija ispitivanja, mogu neutralisati eventualni efekti tačke merenja, selektivno osipanje sa druge strane nužno dovodi do smanjenja reprezentativnosti uzorka u odnosu na opštu populaciju i postaje naročito problematično kada se porede razvojne putanje različitih grupa ispitanika (tada razlike u reprezentativnosti mogu biti konfundirane sa razvojnim efektima).

Drugo, poput ostalih SEM analiza, i LGM uključuje pretpostavku o normalnoj raspodeli prediktora, ali i zavisnih varijabli u svakoj situaciji merenja. Pored toga, neophodno je da uzorci budu dovoljno veliki kako bi primena modela bila moguća (opšta je preporuka da broj ispitanika bude najmanje pet puta veći od broja slobodnih parametara). Konačno, uvek postoji mogućnost da je predloženi razvojni model samo jedan od mogućih objašnjenja podataka. Načelno, od istraživača se očekuje da eksplicira što veći mogući broj plauzabilnih modela, te da ih potom uporedi kako bi na osnovu objektivnih pokazatelja fita mogao da odluči koji je najoptimalniji. Ovde nailazimo na barem dve potencijalne prepreke. Jedna se tiče sposobnosti istraživača da iscrpno specificuje različite modele, dok se druga odnosi na odsustvo opšteprihvaćenog indeksa komparativnog fitovanja, što uslođnjava proces donošenja odluke.

Na interpretaciju rezultata dobijenih primenom modela latentnog rasta utiču i ostale odluke istraživača. Na primer, intercept se može fiksirati na bilo koju tačku merenja specifikovanjem nultog zasićenja na željeni koeficijent uzrasne osnove (na primer, $A[t] = [-2, -1, 0, 1]$). Ovo vodi različitim procenama ostalih parametara. Premda mogućnost centriranja rasta oko različitih vremenskih tačaka omogućava istraživaču dodatnu slobodu prilikom specifikovanja kondicionalnih modela koji uključuju prediktore latentnih faktora rasta, ona zahteva dodatni oprez prilikom interpretacije rezultata, posebno onih koji se tiču faktora nagiba.

Diferencijalnim psiholozima se često upućuje primedba da su u većoj meri usmereni na metod nego na predmet istraživanja. U tom kontekstu potrebno je više pažnje obratiti na smisao varijabli i njihovih relacija unutar modela. McArdle (2004, p. 362) ukazuje na problem „eluzivnog značenja samih parametara modela rasta”. Možemo se, na primer, pitati šta to znači kada kažemo da latentni intercept podjednako utiče na sve ponovljene mere, kakvo je značenje faktora intercepta ukoliko je on centriran na neku od potonjih vremenskih tačaka i da li su latentni faktori samo matematička sredstva aproksimativnog opisa funkcije ili imaju i psihološki smisljeno značenje. Iako latentna razvojna putanja nesumnjivo predstavlja korisno sredstvo uopštavanja individualnih krivulja rasta, ostaje nejasno da li predloženi model pruža saznanja o psihološkim mehanizmima koji leže u osnovi date funkcije. Uvođenje eksplanatornih varijabli omogućava da odemo korak dalje u razumevanju prirode razvoja konkretnog fenomena.

Duncan i saradnici (Duncan et al., 1999) navode da LGM uključuje fundamentalnu postavku o tome da je promena svakog pojedinca sistematski povezana sa protokom vremena, barem tokom perioda koji nas zanima. Ukoliko, pak, to nije slučaj, istraživanje individualnih putanja neće biti naročito informativno. Pored toga, LGM nije imun ni na fundamentalnije probleme razvojnih istraživanja. Interpretacije faktora rasta su problematične ukoliko testovni skorovi nemaju isto značenje na različitim uzrastima i ukoliko ne odražavaju relativno homogen konstrukt (Muthen & Khoo, 1998). Sadržaji kognitivnih testova se menjaju na različitim uzrastima, i premda IRT tehnike mogu pomoći da poredimo skorove sa različitim instrumenata, potrebno je razmotriti koherentnu stabilnost istraživog fenomena, što je u većoj meri konceptualni nego empirijski problem.

Zaključak

Longitudinalna istraživanja traju dugo i opterećena su problemima jednakosti merenja, uvežbavanja i tačke merenja. Međutim, iako je faza prikupljanja podataka zahtevna, proces testiranja statističkih hipoteza može biti teorijski veoma plodonosan. Tako su nalazi o različitosti opštih razvojnih putanja faktora fluidne i kristalizovane inteligencije (klasičan obrazac starenja; Botwinick, 1977) poslužili kao snažan empirijski argument osnovne pretpostavke o nezavisnosti dimenzija danas dominantnog modela strukture kognitivnih sposobnosti, CHC okvira (Cattell–Horn–Carroll; Carroll, 1993; Cattell, 1963; Horn & Blankson, 2005). Pored

toga, primenom LGM tehnologije, McArdle i Epstein (McArdle & Epstein, 1987) pokazuju nelinearan trend rasta WISC skorova kod dece predškolskog uzrasta. U literaturi nailazimo i na rezultate modelovanja latentnih razvojnih putanja matematičkog postignuća dece (Muthen & Khoo, 1998), ali i razvoja suicidalnih ideacija, depresivnih simptoma, zloupotrebe supstanci (Duncan et al., 1999), te kriminalnog (Bollen & Curran, 2006) i devijantnog ponašanja omladine (Kline, 1998).

Sa druge strane, treba uzeti u obzir i moguću korisnost informacija o razlikama u individualnim razvojnim krivuljama i perspektivu njihovog objašnjenja uvođenjem prediktora. Drugim rečima, ponekad se i u eksperimentalnim greškama (specifičnostima pojedinačnih razvojnih krivulja) kriju informacije koje su predvidive lakše saznatljivim varijablama. Tako Raykov (1995, p. 281), istražujući efekte kognitivnih intervencija, zaključuje da postoje „rezervni kapaciteti u fluidnoj inteligenciji odraslih“, čime pruža empirijsku podršku ideji o modifikabilnosti intelektualnog postignuća, dok McArdle i Bell (McArdle & Bell, 2000) nalaze značajan prediktivni doprinos emocionalne, ali ne i kognitivne podrške roditelja u objašnjenju varijanse nagiba funkcije rasta skora čitalačke pismenosti dece.

Na kraju, možemo konstatovati da je i pored ekspliciranih ograničenja, modelovanje latentnog rasta plodonosan okvir obrade teško prikupljivih longitudinalnih podataka kojima pristupa obuhvatno i na taj način omogućava istraživaču da, pored opštih pravilnosti rasta, otkrije i determinante razlika u individualnim razvojnim putanjama.

Reference

- Bell, R. Q. (1953). Convergence: An Accelerated Longitudinal Approach. *Child Development, 24*, 145–152.
- Bollen, K. A., & Curran P. J. (2006). *Latent Curve Models: A Structural Equation Perspective*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Botwinick, J. (1977). Intellectual Abilities. In J. E. Birren & K. W. Schaie (Eds.), *Handbook of the Psychology of Aging* (pp. 580–605). New York: Van Nostrand Reinhold.
- Bratko, D. (2002). Teorijski i metodološki problemi pri istraživanju kontinuiteta i promjena ličnosti. *Društvena istraživanja, 11*, 603–622.
- Carroll, J. B. (1993). *Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor-Analytic Studies*. New York: Cambridge University Press.
- Caspi, A., & Bem, D. (1990). Personality Continuity and Change across the Life Course. In L. A. Pervin (Ed.), *Handbook of Personality: Theory and Research* (pp. 549–575). New York: The Guilford Press.
- Cattell, R. B. (1963). Theory of Fluid and Crystallized Intelligence: A Critical Experiment. *Journal of Educational Psychology, 54*, 1–22.
- Duncan, T., & Duncan, S. (2004). An Introduction to Latent Growth Curve Modeling. *Behavior Therapy, 35*, 333–363.

- Duncan, T., Duncan, S., Strycker, L., Fuzhong L., & Alpert, A. (1999). *An Introduction to Latent Variable Growth Curve Modeling: Concepts, Issues, and Applications*. Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.
- Hamagami, F. (1998). A Developmental-Based Item Factor Analysis. In J. J. McArdle & R. W. Woodcock (Eds.), *Human Cognitive Abilities in Theory and Practice* (pp. 231–246). Mahwah, USA: Erlbaum.
- Horn, J., & Blankson, N. (2005). Foundations for Better Understanding of Cognitive Abilities. In D. Flanagan & P. Harrison (Eds.), *Contemporary Intellectual Assessment* (pp. 41–68). New York: The Guilford Press.
- Keith, T. (2005). Using Confirmatory Factor Analysis to Aid in Understanding the Constructs Measured by Intelligence Tests. In D. Flanagan & P. Harrison (Eds.), *Contemporary Intellectual Assessment* (pp. 581–614). New York: The Guilford Press.
- Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling*. New York: Guilford Press.
- Layarević, Lj. (2008). Primena indeksa podesnosti u testiranju teorijskih modela u psihologiji – mogućnosti i ograničenja. *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, 40(1), 101–121.
- McArdle, J. J. (2004). Latent Growth Curve Analysis Using Structural Equation Modeling Techniques. In D. Teti (Ed.), *The Handbook of Research Methods in Developmental Psychology* (pp. 340–366). Malden, MA: Blackwell Publishing.
- McArdle, J. J. (2005). Latent Variable Structural Equation Modeling in Developmental Research. In B. Hopkins (Ed.), *The Cambridge Encyclopedia of Child Development* (pp. 147–152). Cambridge University Press.
- McArdle, J. J. (2007). Five Steps in the Structural Factor Analysis of Longitudinal Data. In R. Cudeck & R. C. MacCallum (Eds.), *Factor analysis at 100: Historical developments and future directions* (pp. 99–130). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- McArdle, J. J., & Bell, R. Q. (2000). An Introduction to Latent Growth Curve Models for Developmental Data Analysis. In T. D. Little, K. U. Schnabel, J., & J. Baumert (Eds.), *Modeling Longitudinal and Multiple-Group Data: Practical Issues, Applied Approaches, and Scientific Examples* (pp. 69–107). Mahwah, USA: Erlbaum.
- McArdle, J. J., & Epstein, D. (1987). Latent Growth Curves within Developmental Structural Equation Models. *Child Development*, 58, 110–133.
- McArdle, J. J., Grimm, K., Hamagami, F., Bowles, R., & Meredith W. (2009). Modeling Life-Span Growth Curves of Cognition Using Longitudinal Data with Multiple Samples and Changing Scales of Measurement. *Psychological Methods*, 14, 126–149.
- McArdle, J. J., Hamagami, F., Meredith, W., & Bradway, K. (2000). Modeling the Dynamic Hypotheses of Gf-Gc Theory Using Longitudinal Life-Span Data. *Learning & Individual Differences*, 12, 53–80.

- McArdle, J. J., Ferrer-Caja, E., Hamagami, F., & Woodcock, R. (2002). Comparative Longitudinal Structural Analyses of the Growth and Decline of Multiple Intellectual Abilities over the Life Span. *Developmental Psychology, 38*, 115–142.
- Mehta, P., & West, S. (2000). Putting the individual back into individual growth curves. *Psychological Methods, 5*, 23–43.
- Meredith, W., & Tisak, J. (1990). Latent curve analysis. *Psychometrika, 55*, 107–122.
- Muthen, B., & Khoo, S. (1998). Longitudinal Studies of Achievement Growth Using Latent Variable Modeling. *Learning and Individual Differences, 10*, 73–101.
- Rao, C. R. (1958). Some Statistical Methods for the Comparison of Growth Curves. *Biometrics, 14*, 1–17.
- Raykov, T. (1995). Multivariate Structural Modeling of Plasticity in Fluid Intelligence of Aged Adults. *Multivariate Behavioral Research, 30*, 255–288.
- Sternberg, R. (2002). Individual Differences in Cognitive Development. In U. Goswami (Ed.), *Blackwell Handbook of Childhood Cognitive Development* (pp. 600–619). Malden, MA: Blackwell Publishing.
- Tucker, L. R. (1958). Determination of Parameters of a Functional Relation by Factor Analysis. *Psychometrika, 23*, 19–23.

**Predrag
Teovanović**

Faculty of Special
Education and
Rehabilitation,
University of Belgrade;
Institute of Psychology,
Belgrade

**LATENT GROWTH MODELS (LGM) IN
LONGITUDINAL STUDIES**

Aim of this paper is to conceptually, graphically and mathematically present principles of latent growth modeling (LGM). Model is presented as a part of more general approach of structural equation modeling (SEM). Application of LGM is presented through examples of result structures. Extensions and limitations of basic model are thoroughly discussed. Review also gives information about previous study results in which latent factors are used for data modeling, since it is presumed that latent factors are base for both general and specific developmental trajectories.

Keywords: Latent Growth Modeling (LGM), longitudinal data, developmental trajectories, Structural Equation modeling (SEM)